ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO V, NOVEMBRE 2023

18/11/2023

VERSIONE B

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, e supponiamo che f sia derivabile. Cosa significa che $x_0 \in \mathbb{R}^2$ è un punto critico di f?

(b) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = 4x^2 - y^2$. Determinare i punti critici e dire di che genere sono.

Esercizio 2. Si dica, giustificandolo, se il campo

$$F(x, y, z) = (x^{-1}, -4zy^3, -y^4)$$

è conservativo sul dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}.$$

In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale.

Esercizio 3.

Verificare che per la funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + x \tan y$$

vale il Teorema del Dini nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Detta $y(x)$ la funzione implicita, si calcoli $y(1)$ e $y'(1)$.

Esercizio 4.

(a) Enunciare la formula per trovare l'area mediante integrali curvilinei, per domini limitati e semplici rispetto agli assi.

(b) Calcolare, mediante la formula del punto (a), l'area della regione del piano D delimitata della curva descritta da

$$\frac{x^2}{9} + 3y^2 = 1, \quad x \geq 0,\, y \geq 0 \tag{1}$$

e dagli assi cartesiani. Si osservi che (1) descrive il ramo di un'ellisse nel primo quadrante.

Soluzioni

1a. Vuol dire che $\nabla f(x_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

1b. La funzione è derivabile ovunque e l'unico punto critico è l'origine. Tale punto è un punto di sella, essendo negativo il determinante dell'Hessiana.

2. Il rotore di F è nullo, ed essendo D semplicemente connesso si ha che F è conservativo. Integrando, un potenziale è dato da

$$U(x,y,z) = \log|x| - zy^4.$$

3. La funzione è C^1. Inoltre, $f(1,0) = 0$, $\partial_y f(x,y) = \frac{x}{\cos^2 y}$, che valutata in $(1,0)$ vale $\partial_y f(1,0) = 1 \neq 0$, pertanto valgono le ipotesi del Teorema del Dini, quindi esiste $y = y(x)$ tale che $f(x, y(x)) = 0$ in un intorno di $x = 1$, con $y(1) = 0$, $y(x)$ derivabile con derivate

$$y'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}.$$

In particolare $y'(1) = 0$.

4a. Per D limitato, semplice rispetto agli assi

$$Area(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx$$

4b. Una parametrizzazione dell'ellisse è data da $\gamma(t) = \left(3\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Quindi l'area della regione data è uguale a quella di un quarto di ellisse.

$$Area(D) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \frac{3}{\sqrt{3}}\cos^2 t + \frac{3}{\sqrt{3}}\sin^2 t\,dt\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi.$$